Résumé 07 : Intégrales généralisées

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ sera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Intégrales généralisées

§ 1. ***Convergence d'une intégrale impropre.—*** Dans cette section, f sera ici indifféremment à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1

Soient $a < b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

- *Si $a \in \mathbb{R}$ et si f est une application continue par morceaux sur $[a, b[$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente lorsque $\int_a^x f(t)dt$ a une limite finie ℓ quand x tend vers b^-. Dans ce cas, on pose*

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt.}.$$

- *Si $b \in \mathbb{R}$ et si f est une application continue par morceaux sur $]a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente lorsque $\int_x^b f(t)dt$ a une limite finie ℓ quand x tend vers a^+. Dans ce cas, on pose*

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt.}.$$

- *Si f est une application continue par morceaux sur $]a, b[$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente lorsque pour au moins un réel $c \in]a, b[$ (et dans ce cas en fait tout réel $c \in]a, b[$), $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent. Dans ce cas, on pose*

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt}.$$

Ce type d'intégrale est dite généralisée, ou impropre. Lorsqu'une de ces intégrales ne converge pas, on dit qu'elle est divergente.

REMARQUES :

1. La nature de l'intégrale (i.e sa divergence oiu sa convergence) ne dépend **que du comportement local de f en b**.
2. Ainsi, si f est une fonction continue sur $[a, b[$, elle admet au moins une primitive F. Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si F admet une limite finie en b^-. Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a)$.

EXEMPLES :

- **Intégrales de Riemann**
  - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.
  - Si $a < b$, $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$.
  - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge toujours.
- $\displaystyle\int_0^1 \ln$ converge.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}dx$ converge $\iff \alpha < 0$.
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{dt}}{1+t^2}$ converge.

§ 2. ***Quelques propriétés.—*** de l'intégrale généralisée.

Propriétés 1.2

L'ensemble E des fonctions f continues par morceaux sur un intervalle $[a, b[$ et telles que $\displaystyle\int_a^b f$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_m^0([a, b[, \mathbb{K})$. De plus,

- $f \in E \longmapsto \displaystyle\int_a^b f \in \mathbb{K}$ *est une forme linéaire sur E.*
- *Cette forme linéaire, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, est positive.*

Proposition 1.3

Si f est continue sur $[a, b[$, et si l'intégrale $\int_a^b f$ converge, alors

- $F : x \longmapsto \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ *est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b[$.*
- $F' = -f$.

§ 3. ***Intégrabilité.—*** On introduit ici une hypothèse plus forte sur f que la seule convergence de son intégrale.

Définition 1.4

Une fonction $f \in \mathscr{C}^0([a, b[, \mathbb{K})$ est dite **intégrable** *sur $[a, b[$ lorsque $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge. On notera $\mathscr{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble de ces fonctions. On dit aussi dans ce cas que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge abso-*

lument.

Comme dans le cas des séries, la convergence absolue est une condition suffisante de convergence :

Théorème 1.5

Si $f \in \mathscr{C}^0([a,b[,E)$ est intégrable, alors $\int_a^b f$ converge.

REMARQUES :

Il n'y a pas d'équivalent de la divergence grossière ici, i.e qu'une fonction peut être intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et ne pas tendre vers 0 en $+\infty$. En revanche, si elle admet une limite finie en $+\infty$, celle-ci est nulle.

2 CAS DES FONCTIONS POSITIVES

Evidemment, l'intégrale d'une fonction positive converge si et seulement si elle est intégrable.

Théorème 2.1

Si f est continue par morceaux sur $[a,b[$ et **POSITIVE***,*

$$\begin{aligned}\int_a^b f \text{ converge} &\iff x \longmapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est majorée.}\\ &\iff f \text{ est intégrable.}\\ &\iff \lim_{n\to+\infty}\int_a^{b_n} f \text{ existe et est réelle quand } b_n \to b\\ &\iff \left\{\int_a^b f,\ \text{où } [a,b]\subset I\right\} \text{ est majoré.}\end{aligned}$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^{b_n} f(t)dt\\ &= \sup\left\{\int_a^b f,\ \text{où } [a,b]\subset I\right\}.\end{aligned}$$

Commençons par le cas où l'intégrale est faussement généralisée :

Proposition 2.2 (*Cas des fonctions prolongeables par continuité*)

Si $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ est une fonction continue qui admet une limite finie en b^-, alors $\int_a^b f$ converge.

Enonçons quelques théorèmes de comparaisons. Vous remarquerez un fait essentiel : la fonction de référence est toujours positive.

Proposition 2.3

Soit $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux **à valeurs positives***, et $f : [a,b| \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.*

- *Si $0 \leqslant f \leqslant g$ et si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.*

- *Si $f = \mathcal{O}_b(g)$ et si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.*
- *Si $b = +\infty$ et s'il existe $\alpha > 1$ tel que $x^\alpha f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} O$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.*
- *Si f est à valeurs réelles, et si $f \sim_b g$, alors $\int_a^b g$ converge $\iff \int_a^b f$ converge.*

§ 1. ***Deux outils essentiels.—*** Ils permettent de transformer une intégrale donnée en intégrale plus simple.

Proposition 2.4

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

EXEMPLES :

On se souviendra de la preuve de la convergence de $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin t}{t}dt$, et de celle de la divergence de $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\sin t|}{t}dt$.
D'une manière générale (mais ce n'est pas une régle absolue), on sera bien inspiré pour prouver la convergence d'un intégrale semi-convergente, d'effectuer une intégration par parties afin d'obtenir une nouvelle intégrale, mais cette fois-ci d'une fonction absolument convergente.

Proposition 2.5 (*Changement de variable*)

Soit f continue de $]a,b[$ dans $\mathbb{K}$, et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante, et de classe $\mathscr{C}^1$. Les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(s)\varphi'(s)ds$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

On appliquera ce théorème sans justifier lorsque φ est affine, exponentielle, puissance ou logarithme.

§ 2. ***Intégration des relations de comparaison.—*** On se fixe une fonction $f \in \mathscr{C}^0([a,b[,\mathbb{R})$ **positive**, et $g \in \mathscr{C}^0([a,b[,\mathbb{R})$.

- **Cas de divergence -** On suppose ici que $\int_a^b f$ diverge, i.e que $\int_a^x f(t)dt \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$. Alors
  1. Si $g(x) = \mathcal{O}\big(f(x)\big)$ en b^-, alors $\int_a^x g(t)dt = \mathcal{O}\left(\int_a^x f(t)dt\right)$ quand $x \to b^-$.
  2. Si $g(x) = o\big(f(x)\big)$ en b^-, alors $\int_a^x g(t)dt = o\left(\int_a^x f(t)dt\right)$ quand $x \to b^-$.
  3. Si $g(x) \sim f(x)$ en b^-, alors $\int_a^x g(t)dt \sim \int_a^x f(t)dt$ quand $x \to b^-$.
- **Cas de convergence -** On suppose ici que $\int_a^b f$ converge, i.e que $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est bornée sur $[a,b[$. Alors
  1. Si $g(x) = \mathcal{O}\big(f(x)\big)$ en b^-, alors $\int_x^b g(t)dt = \mathcal{O}\left(\int_x^b f(t)dt\right)$ quand $x \to b^-$.
  2. Si $g(x) = o\big(f(x)\big)$ en b^-, alors $\int_x^b g(t)dt = o\left(\int_x^b f(t)dt\right)$ quand $x \to b^-$.

3. Si $g(x) \sim f(x)$ en b^-, alors $\int_x^b g(t)dt \sim \int_x^b f(t)dt$ quand $x \to b^-$.

ANNEXE

A Les preuves à connaitre...

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.
- $\displaystyle\int_0^1 \exp -\frac{\varepsilon}{\sqrt{x}} dx = 1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2 \ln \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ quand $\varepsilon \to 0^+$.

B Quelques exercices classiques

Exercices :

CCP Analyse 28

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?